

Relación de áreas de polígonos en transformaciones lineales geométricas

Relationship of polygon areas in geometric linear transformations

Roberto Cascante-Yarlequé¹

INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

Fecha de recepción:
Fecha de aceptación: 5 de marzo de 2025

¹ Roberto Cascante-Yarlequé
<https://orcid.org/0000-0001-7875-0125>
Universidad Estatal de Milagro
rcascantey@unemi.edu.ec

RESUMEN

En la presente investigación se realiza inicialmente una revisión de conceptos previos tales como, Espacios Vectoriales, Transformaciones Lineales y Matrices asociadas; luego, particularmente el estudio se centra en las transformaciones geométricas. Posteriormente, se realizan varios ejemplos verificando la relación entre áreas existentes en polígonos obtenidos a partir de una transformación geométrica para plantear una conjetura acerca de dicha relación. Finalmente, se demuestra la conjetura en base a una transformación entre paralelogramos para así poder hacer una extensión a cualquier polígono con el uso del cálculo de áreas en el plano.

Palabras clave: transformaciones geométricas, matriz asociada, isomorfismo, homólogos.

ABSTRACT

In the present investigation, a revision of previous concepts such as Vector Spaces, Linear Transformations and Associated Matrices is carried out; particularly the study focuses on geometric transformations. Then, several examples are made verifying the relationship between existing areas in polygons obtained from a geometric transformation to raise a conjecture about that relationship. Finally, it demonstrates the conjecture based on a transformation between parallelograms in order to make an extension to any polygon with the use of the calculation of areas in the plane.

Palabras clave: geometric transformations, associated matrix, isomorphism, homologs.



I. INTRODUCCIÓN

En un curso básico de Álgebra Lineal se estudia el concepto de Espacios Vectoriales, los cuales son estructuras algebraicas definidas sobre conjuntos no vacíos que poseen un campo escalar asociado, junto con dos operaciones y varios axiomas que definen al mismo.

Sobre los espacios vectoriales y su campo escalar asociado se define una Transformación Lineal, particularmente se estudiará el caso pun-

tual de un operador lineal en $\mathbb{R}^2$ el cual posee muchas propiedades geométricas interesantes entre las que, al transformar polígonos, la razón entre las áreas de la figura original y su transformada es una constante.

A continuación, se revisarán algunos conceptos y teoremas relacionados con la investigación, además se realizará la justificación de los teoremas a utilizar y de ser el caso se ilustrarán con ciertos ejemplos y gráficos para una mejor comprensión.

II. DEFINICIONES Y TEOREMAS PRELIMINARES

Sean $(V, \oplus, \odot \alpha)$ y $(W, \boxplus, \boxdot \alpha)$ dos espacios vectoriales asociados al campo escalar K . Una transformación Lineal T de V en W , denotada como $T: V \rightarrow W$, asigna a todo vector $v \in V$ un único vector $T(v) \in W$, y además cumple con los siguientes axiomas de linealidad:

1.- Linealidad con respecto a la suma vectorial:

$$\forall v_1, v_2 \in V: T(v_1 \oplus v_2) = T(v_1) \boxplus T(v_2)$$

2.- Linealidad con respecto al producto por escalar:

$$\forall \alpha \in K, \forall v \in V: T(\alpha \odot v) = \alpha \boxdot T(v)$$

Entre los principales conceptos matemáticos –como ejemplo- que cumplen con los axiomas de linealidad y que los definen como transformaciones lineales se tienen los límites, las derivadas y las integrales definidas.

Definición 2.- Transformación Inyectiva

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. T es Inyectiva (1-1) si y solo si:

$$\forall v_1, v_2 \in V: T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$$

Definición 3.- Transformación Sobreyectiva

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. T es Sobreyectiva (Sobre) si y solo si para todo $w \in W$ existe al menos un vector $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

Simbólicamente:

$$T: V \rightarrow W \text{ es Sobreyectiva} \equiv \forall w \in W, \exists v \in V / T(v) = w.$$

Definición 4.- Isomorfismo

Sea $T:V \rightarrow W$ una transformación lineal. T es un Isomorfismo si y solo si T es Inyectiva y Sobreyectiva.

A continuación, se va a considerar una situación particular de transformación lineal, conocida como Operador Lineal Geométrico, en donde se tiene el campo de los números reales asociado a los espacios vectoriales de partida y de llegada; es decir: $K=\mathbb{R}$ y además los espacios vectoriales de partida y de llegada son iguales al conjunto $\mathbb{R}^2$.

De ahí que se tiene:

$$T:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Este tipo de transformaciones lineales en el plano $\mathbb{R}^2$, aplicadas a figuras geométricas, construyen una nueva figura a partir de la que ha sido dada inicialmente; la nueva figura se llama *homóloga* o transformada de la original. Así, por ejemplo, la transformación de un segmento de recta $(AB)^-$ es el segmento homólogo $(A'B')^-$ tal que, a cada uno de los puntos del primero, le corresponde, por la transformación geométrica T , un punto del segundo; es decir:

$$T((AB)^-) = (A'B')^-$$

Para justificar lo mencionado anteriormente, se considera lo siguiente.

Definición 5.- Segmento cerrado en $\mathbb{R}^2$

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^2$, $X \neq Y$, un segmento de recta cerrado en $\mathbb{R}^2$, denotado como $(AB)^-$, se define como:

$$(AB)^- = \{ \lambda X + (1-\lambda)Y \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \}$$

Teorema 1.- Transformación de segmentos cerrados en $\mathbb{R}^2$

Si $T:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un Isomorfismo, todo segmento de recta cerrado en $\mathbb{R}^2$, se transforma en otro segmento de recta cerrado en $\mathbb{R}^2$.

Demostración:

A partir de la definición 5 y considerando una transformación lineal geométrica cualquiera T , se tiene que:

$$T(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \lambda T(X) + (1-\lambda)T(Y)$$

Además, ya que T es un Isomorfismo -dado por el antecedente de la condicional-, eso garantiza que las imágenes $T(X)$ y $T(Y)$ son diferentes. Por lo tanto, la transformada de un segmento de recta cerrado en $\mathbb{R}^2$ es otro segmento de recta cerrado en $\mathbb{R}^2$.

Una forma de representar a una transformación lineal –además de su regla de correspondencia- es mediante la *Matriz Asociada* a la misma, a continuación, se define dicha matriz para posteriormente emplearla para obtener una razón de mucha importancia.

Definición 6.- Matriz asociada a una transformación Lineal

Sea $T:V \rightarrow W$ una transformación lineal y sean B_1 y B_2 bases de V y W respectivamente. Sean $\dim V=n$, $\dim W=m$. La representación matricial de la transformación T (*Matriz Asociada*) con respecto a las bases B_1 y B_2 , denotada como $A_{T_{B_1 B_2}}$ es una matriz $m \times n$ tal que cumple:

$$A_{T_{B_1 B_2}} [v]_{B_1} = [T(v)]_{B_2}, \forall v \in V$$

En las transformaciones geométricas en R^2 , además de la propiedad de transformar segmentos en segmentos de rectas, también se pueden transformar paralelogramos en paralelogramos; para justificar esto, a continuación, se definen a los paralelogramos en el plano R^2 mediante vectores para facilitar la demostración.

Definición 7.- Paralelogramo en R^2

Dado $P \in R^2$, y sean v_1, v_2 vectores que parten del vértice P , $v_1 \neq v_2$; un paralelogramo D de lados no paralelos v_1, v_2 , se define como:

$$D = \{P + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid 0 \leq \lambda_1 \leq 1, 0 \leq \lambda_2 \leq 1\}$$

Teorema 2.- Transformación de paralelogramos en R^2

Sea $T:R^2 \rightarrow R^2$ un Isomorfismo y sea D^* un paralelogramo. Entonces:

- (i) $D = T(D^*)$ es un paralelogramo
- (ii) Los vértices de D son las imágenes de los vértices de D^*

Demostración:

Sea $A \in M_{2 \times 2}$ la matriz asociada a una transformación $T:R^2 \rightarrow R^2$ con respecto a las bases canónicas $B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Debido a que T es un Isomorfismo, $\det(A) \neq 0$.

Supóngase que P es un vértice del paralelogramo D^* y que los vectores u, v parten del vértice P y son dos de sus lados, entonces:

$$D^* = \{P + tu + sv \mid 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$$

Sean: $w = T(u)$, $z = T(v)$, y:

$$D = \{T(P) + \lambda w + \mu z \mid 0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \mu \leq 1\}$$

el paralelogramo con uno de los vértices en $T(P)$ y w, z como dos de sus lados.

Gráficamente:

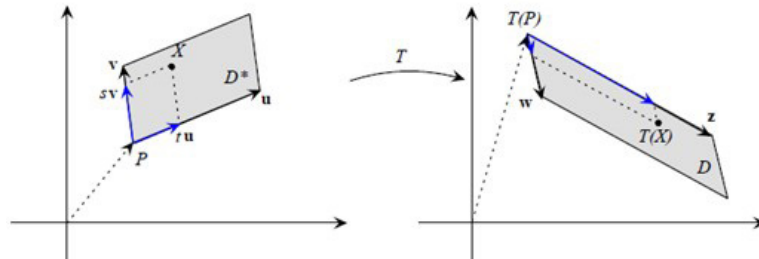


Figura 1.- Transformaciones de paralelogramos en $\mathbb{R}^2$

Dado un punto cualquiera $X \in D^*$, existen $t, s \in [0, 1]$ tales que $X = P + tu + sv$, entonces:

$$T(X) = T(P + tu + sv)$$

$$T(X) = T(P) + tT(u) + sT(v)$$

De ahí que: $T(X) \in D, \forall X \in D^*$, es decir:

$$T(D^*) \subset D$$

Por otro lado, sea un punto cualquiera $Y \in D$, existen escalares $\lambda, \mu \in [0, 1]$ tales que $Y = T(P) + \lambda w + \mu z$, entonces:

$$Y = T(P) + \lambda T(u) + \mu T(v)$$

$$Y = T(P + \lambda u + \mu v)$$

De ahí que: $Y \in T(D^*)$, debido a que $P + \lambda u + \mu v \in D^*$, y, por lo tanto:

$$D \subset T(D^*)$$

Con esto se ha probado que $T(D^*) = D$.

Con respecto a los vértices del paralelogramo D^* , se tienen los cuatro puntos:

$$P, P+u, P+v, P+u+v$$

Sus transformadas son:

$$T(P), T(P+u)=T(P)+w, T(P+v)=T(P)+z, T(P+u+v)=T(P)+w+z$$

Es decir, las imágenes de los vértices de D^* son los vértices de D .

III.- EJEMPLOS PREVIOS A LA CONJETURA

A continuación, se consideran algunas figuras en el plano $\mathbb{R}^2$ para transformarlas utilizando la regla de correspondencia:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

Cabe indicar que la regla de correspondencia dada ha sido arbitraria de tal manera que cumpla con la condición de un Isomorfismo; además, una vez obtenida la figura homóloga se determinará la relación entre esta área y el área de la figura original, para esto se consideran diferentes ejemplos:

Ejemplo 1: Triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$

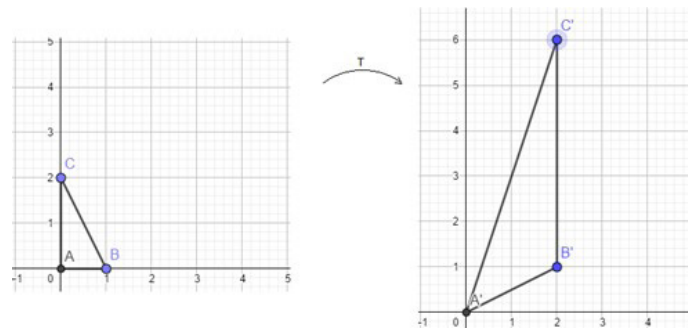


Figura 2.- Transformación de un triángulo en $\mathbb{R}^2$

Sean los vértices $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(0, 2)$; transformando cada uno de estos puntos se tiene:

$$A' = T\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B' = T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C' = T\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Calculando las áreas se tiene:

$$\mathcal{A}_{ABC} = 1 \, u^2$$

$$\mathcal{A}_{A'B'C'} = 5 \, u^2$$

La razón entre las áreas del homólogo y el original es:

$$\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{5}{1} = 5$$

Ejemplo 2: Cuadrado de vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1) y (0, 1)

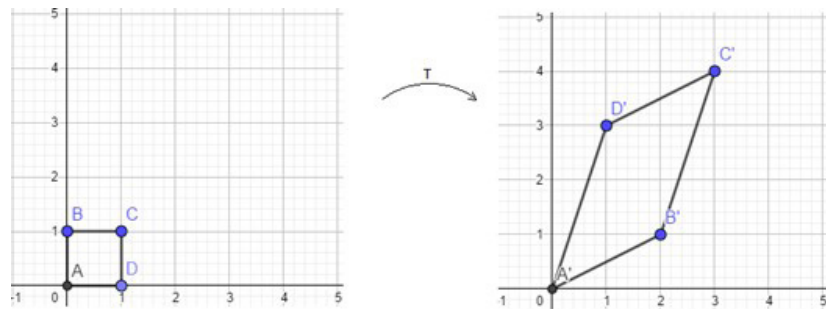


Figura 2.- Transformación de un cuadrado en $\mathbb{R}^2$

Sean los vértices A (0, 0), B (1, 0), C (1, 1) y D (0, 1); transformando cada uno de estos puntos se tiene:

$$\begin{aligned} A' &= T \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & B' &= T \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C' &= T \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} & D' &= T \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculando las áreas se tiene:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 1 u^2$$

$$\mathcal{A}_{A'B'C'D'} = 5 u^2$$

La razón entre las áreas del homólogo y el original es:

$$\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'D'}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{5}{1} = 5$$

Ejemplo 3: Pentágono de vértices (0, 0), (1, 0), (2, 1), (1, 2) y (0, 2)

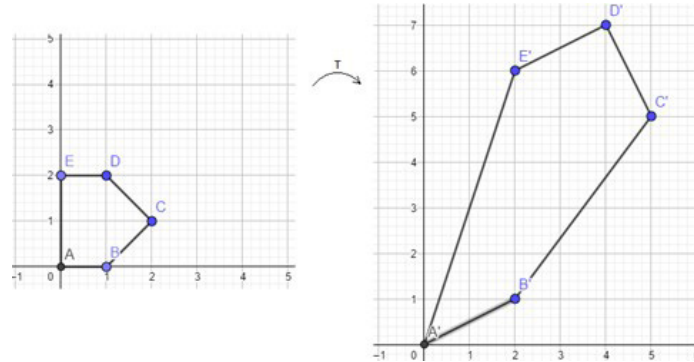


Figura 4.- Transformación de un pentágono en $\mathbb{R}^2$

Sean los vértices A (0, 0), B (1, 0), C (2, 1), D (1, 2) y E (0, 2); transformando cada uno de estos puntos se tiene:

$$\begin{aligned} A' &= T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & B' &= T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C' &= T \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} & D' &= T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ E' &= T \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculando las áreas se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABCDE} &= 3 u^2 \\ \mathcal{A}_{A'B'C'D'E'} &= 15 u^2 \end{aligned}$$

La razón entre las áreas del homólogo y el original es:

$$\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'D'}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{15}{3} = 5$$

Como se puede observar en los ejemplos, en todas las relaciones entre las áreas que provienen de la misma transformación lineal, se tiene el mismo cociente o relación entre dichas áreas; este valor está relacionado con el determinante de la matriz asociada a T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Es decir:

$$\begin{aligned} A_{T_{B_C}} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \det(A_{T_{B_C}}) &= 5 \end{aligned}$$

Sin embargo, no importa la base con respecto a la cual se calcula la matriz asociada debido a que son semejantes y preservan el determinante.

IV.- PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA

Los polígonos utilizados arbitrariamente no necesariamente han sido regulares, los polígonos han sido convexos y simples. Con respecto a estas dos últimas características se deberían analizar casos en donde no se tengan polígonos convexos o casos en donde las líneas poligonales pasen más de una vez por un mismo punto.

Además, se debe recordar que la transformación planteada es un Isomorfismo debido a que el determinante de su matriz asociada es diferente de cero; eso garantiza la correspondencia única de todos los puntos de la figura original con su correspondiente homólogo.

En base a esto surge la siguiente conjetura, la cual, su justificación, es el motivo principal de la presente investigación.

Conjetura:

Sea P^* un polígono cualquiera y sea T una transformación lineal geométrica. Sea T un Isomorfismo. Entonces:

$$\frac{\mathcal{A}(T(P^*))}{\mathcal{A}(P^*)} = |\det(A_{T_B})|$$

Donde:

$\mathcal{A}(P^*)$: área del polígono P^* .

$\mathcal{A}(T(P^*))$: área del homólogo de P^* .

A_{T_B} : matriz asociada a T con respecto a cualquier base.

Para poder demostrar la conjetura planteada, se procederá primero a justificar un teorema intermedio, en donde se aplica la conjetura particularmente para un paralelogramo.

Teorema 3.- Razón de áreas entre paralelogramos homólogos

Sea D^* un paralelogramo cualquiera y sea T una transformación lineal geométrica. Sea T un Isomorfismo. Entonces:

$$\frac{\mathcal{A}(T(D^*))}{\mathcal{A}(D^*)} = |\det(A_{T_B})|$$

Donde:

$\mathcal{A}(D^*)$: área del paralelogramo D^* .

$\mathcal{A}(T(D^*))$: área del homólogo de D^* .

A_{T_B} : matriz asociada a T con respecto a cualquier base.

Demostración:



Figura 5.- Paralelogramo en $\mathbb{R}^2$

Observando la figura 5, se tiene el paralelogramo D^* cuyos dos lados no paralelos son los vectores u, v . El área de este paralelogramo es:

$$\mathcal{A}(D^*) = \|u\| h$$

$$\mathcal{A}(D^*) = \|u\| \|v\| \sin(\theta)$$

Por el producto interno euclidiano, se conoce que:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

Esto último permite plantear el siguiente triángulo rectángulo:

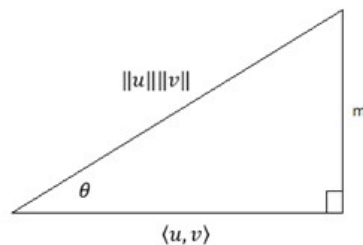


Figura 6.- Triángulo rectángulo

De este triángulo se obtiene una expresión del cateto m:

$$m = \sqrt{(\|u\| \|v\|)^2 - (\langle u, v \rangle)^2}$$

De ahí que:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}}{\|u\| \|v\|}$$

Y, por lo tanto, el área del paralelogramo D^* , es:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(D^*) &= \|u\| \|v\| \frac{\sqrt{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}}{\|u\| \|v\|} \\ \mathcal{A}(D^*) &= \sqrt{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2} \end{aligned}$$

Aplicando la misma expresión para su homólogo:

$$\mathcal{A}(T(D^*)) = \sqrt{\|w\|^2 \|z\|^2 - \langle w, z \rangle^2}$$

Donde: $w=T(u)$, $z=T(v)$

De las expresiones obtenidas, se tiene la razón entre sus áreas:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(T(D^*))}{\mathcal{A}(D^*)} &= \frac{\sqrt{\|w\|^2 \|z\|^2 - \langle w, z \rangle^2}}{\sqrt{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}} \\ \frac{\mathcal{A}(T(D^*))}{\mathcal{A}(D^*)} &= \sqrt{\frac{\|w\|^2 \|z\|^2 - \langle w, z \rangle^2}{\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2}} \end{aligned}$$

Para simplificar los cálculos del radicando, considérese el siguiente teorema.

Teorema 4.- El cuadrado de un determinante 2x2

Sean v_1 y v_2 vectores de $\mathbb{R}^2$. Entonces:

$$\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2 = \left(\begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{vmatrix} \right)^2$$

Demostración:

Sean los vectores: $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ entonces se tiene:

$$\|v_1\|^2 = a^2 + b^2, \quad \|v_2\|^2 = c^2 + d^2$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = ac + bd$$

De la expresión del miembro izquierdo de la igualdad se tiene:

$$\begin{aligned} \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2 &= \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - 2abcd - b^2d^2 \\ &= a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \\ &= (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, en el miembro derecho de la igualdad se tiene:

$$\left(\begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{vmatrix} \right)^2 = \left(\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right)^2 = (ad - bc)^2$$

Retomando el teorema 3, con ayuda de este último teorema, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(T(D^*))}{\mathcal{A}(D^*)} &= \frac{\sqrt{\left(\begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow \\ w & z \\ \downarrow & \downarrow \end{vmatrix} \right)^2}}{\sqrt{\left(\begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow \\ u & v \\ \downarrow & \downarrow \end{vmatrix} \right)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\left(\begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow \\ w & z \\ \downarrow & \downarrow \end{vmatrix} \right)^2}}{\sqrt{\left(\begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow \\ A_{T_B}u & A_{T_B}v \\ \downarrow & \downarrow \end{vmatrix} \right)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\left(\begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow \\ w & z \\ \downarrow & \downarrow \end{vmatrix} \right)^2}}{\sqrt{\left(\begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow \\ u & v \\ \downarrow & \downarrow \end{vmatrix} \right)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{\left(\begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow \\ |A_{T_B}| & u & v \\ \downarrow & \downarrow \end{vmatrix} \right)^2}}{\sqrt{\left(\begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow \\ u & v \\ \downarrow & \downarrow \end{vmatrix} \right)^2}} = \sqrt{(|A_{T_B}|)^2} \\ &= |\det(A_{T_B})| \end{aligned}$$

Una vez realizada la demostración del teorema previo, se puede justificar la conjetura planteada.

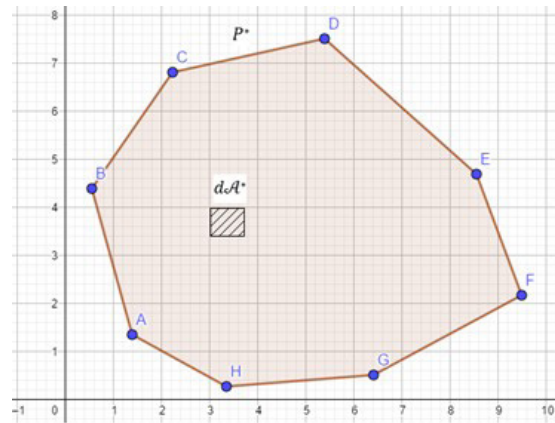


Figura 7a.- Transformación de polígonos

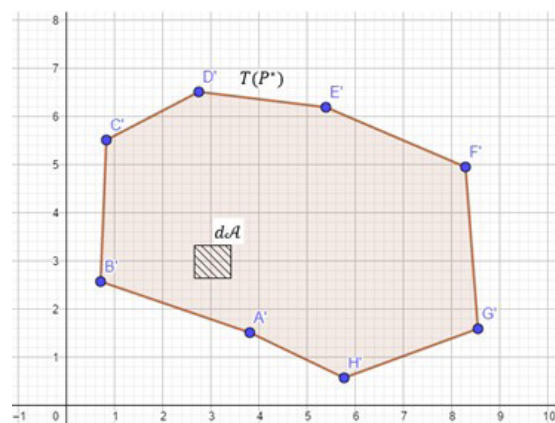


Figura 7b.- Transformación de polígonos

Sea P^* un polígono cualquiera, se tiene un diferencial de área dA^* , el cual es un cuadrado (un caso particular de paralelogramo), tal como se muestra en la figura 7a.

Sea T un isomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, se tiene que, al transformar dicho diferencial de área, se obtiene su correspondiente homólogo dA que preserva la relación de áreas dada por el determinante de la matriz asociada, es decir:

$$\frac{d\mathcal{A}}{d\mathcal{A}^*} = |\det(A_{T_B})|$$

$$d\mathcal{A} = |\det(A_{T_B})| d\mathcal{A}^*$$

Posteriormente se procede a integrar sobre la región encerrada por sus respectivos polígonos:

$$\iint_P d\mathcal{A} = \iint_{P^*} |\det(A_{T_B})| d\mathcal{A}^*$$

$$\iint_P d\mathcal{A} = |\det(A_{T_B})| \iint_{P^*} d\mathcal{A}^*$$

$$\frac{\iint_P d\mathcal{A}}{\iint_{P^*} d\mathcal{A}^*} = |\det(A_{T_B})|$$

Por lo tanto:

$$\frac{\mathcal{A}(T(P^*))}{\mathcal{A}(P^*)} = |\det(A_{T_B})|$$

Con esto se ha demostrado que la razón entre las áreas del polígono homólogo y su correspondiente original está dada por el valor absoluto del determinante de la matriz asociada a T con respecto a cualquier base de $\mathbb{R}^2$.

V.- CONCLUSIONES

Con la presente investigación, se ha podido demostrar la relación de áreas existente entre paralelogramos como punto de partida y posteriormente, mediante la generalización y el cálculo, entre polígonos provenientes de una transformación geométrica; dicha relación se establece con el determinante de la matriz asociada con respecto a cualquier base de la transformación lineal.

La razón obtenida indica además que, independientemente de la figura geométrica que se transforme mediante isomorfismos, conservando la regla de correspondencia, las áreas mantienen una proporcionalidad.

La relación obtenida podría extenderse a figuras geométricas con bordes no lineales, partiendo del resultado obtenido en los paralelogramos y con aplicación del cálculo.

Se puede aplicar también la relación obtenida en polígonos no convexos y polígonos no simples; ya que podrían subdividirse los mismos en regiones simples y convexas para calcular la relación entre sus áreas.

Adicionalmente, realizando los cálculos pertinentes para la justificación del teorema 3, se obtuvo un resultado aún no encontrado en alguna publicación previa, este se menciona en el teorema 4, en donde el cuadrado de un determinante de una matriz cuadrada de orden 2 se expresa en términos de productos internos y normas de los vectores columna de dicha matriz. Posteriormente esa expresión se podría considerar para estudios relacionados con determinantes y productos internos.

VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

S. I. Grossman; Álgebra Lineal; McGraw-Hill; México 2015.

B. Kolman; Álgebra Lineal; Pearson Education; México 2012.

F. Hohn; Elementary Matrix Algebra; The Macmillan Company; USA 1961.

M. Giaquinta; Mathematical Analysis; Birkhauser; USA 2007.

T. Apostol; Mathematical Analysis; Addison-Wesley Publishing Company; Inglaterra 1960.

J. C. Bressan; Interpretación geométrica de la regla de Cramer; Argentina 2008.

J. G. Molina; Concepciones de la transformación lineal en el contexto geométrico; México 2006.